- **La duración del examen será de 2 horas.**
- **Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota del examen.**
- **Las notas y el procedimiento para la revisión del examen se comunicará a través del curso Moodle.**

Problema 1.

a) Calcular el polinomio $h(t)$ de grado 2, con la restricción de que su gráfica pasa por el punto (0,0) (esto es, $h(0)=0$), que mejor ajusta los datos de la siguiente tabla

t_k	1	2	3
h_k	15.4	19.9	15.4

Tabla T

Dar las expresiones de los sistemas sobredeterminado y ecuaciones normales obtenidos.

b) Calcular el polinomio $p(t)$ de grado 2, con las restricciones $p(0)=p(4)=0$, que mejor ajusta los datos de la tabla T.

c) Si lanzamos una piedra hacia arriba y medimos su altura $h(t)$ (en metros [m]) en diferentes instantes de tiempo t (en segundos [s]), la posición de la piedra sigue la siguiente relación

$$h(t)=v_0 t-\frac{1}{2}gt^2$$

donde v_0 es la velocidad inicial (en [m/s]) y g es la aceleración de la gravedad (en [m/s^2]).

Calcular la velocidad inicial v_0 y la aceleración de la gravedad g si lanzamos una piedra y obtenemos los resultados de la tabla T. ¿En qué valor t_1 la piedra alcanza su altura máxima (esto es, t_1 es el instante donde $h(t)$ alcanza su valor máximo) ?, ¿Cuál es esa altura máxima?.

Problema 2. Sea el polinomio $p(x)=x^3-3x-2$ cuyas raíces son s=2 y s=-1.

a) Dar la expresión del método de Newton aplicado a dicho p(x) y demostrar que para cualquier punto inicial x0 en el intervalo (1.5,2.5) el método de Newton converge a la raíz s=2.

b) Para x0=1.9, calcular las dos primeras iteraciones (x1, x2) del método propuesto. Sabiendo que cuando Newton muestra convergencia cuadrática se verifica que $e_n \approx |x_{n+1}-x_n|$, estimar a partir de x0, x1 y x2 sus correspondientes errores (**sin hacer uso de vuestro conocimiento de la solución**).

Iteraciones	Error estimado
x0 = 1.900000	e0=
x1 =	e1 =
x2 =	e2 =

Copiar en vuestro examen la tabla adjunta y rellenad los valores encontrados. Usad 6 decimales tanto para x1 y x2 como para los errores estimados e0, e1, e2.

No se valorarán vuestras respuestas si no justificáis como habéis estimado los errores, indicando los cálculos efectuados.

c) Dar los valores de x1, x2 si empezamos ahora en x0=-1.1. Sabiendo que en este caso la sucesión converge a s=-1, indicar el orden de convergencia del método. Justificar vuestra respuesta.

Problema 3.

Sea el sistema $Ax = b$ con, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\alpha} & \frac{-1}{2\alpha} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \in (0,1)$

a) Calcular la factorización LU sin pivotaje de la matriz A, tal que, A=LU. Resolver el sistema $Ax = b$ utilizando las matrices L y U.

b) Cambiamos el vector b por un nuevo vector $b' = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sin resolver, calcular la variación relativa máxima $\frac{\|x - x'\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ entre la solución del sistema $Ax = b$ y el $Ax' = b'$. Comentar el comportamiento del error en función del parámetro α.

c) Si la solución del sistema $Ax' = b'$ es $x' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10\alpha} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcular el error relativo $\frac{\|x - x'\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ y comprobar si se cumple la cota superior calculada en el apartado anterior.

Solución

Problema 1.

a) El polinomio de grado 2, $h(t) = a + bt + ct^2$, con la condición $h(0) = 0$, tiene la forma $h(t) = bt + ct^2$.

La curva $h(t) = bt + ct^2$ que ajusta los datos de la tabla T viene dada por el sistema sobredeterminado:

$$\begin{cases} b + c = 15.4 \\ 2b + 4c = 19.9 \\ 3b + 9c = 15.4 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones normales es:

$$\begin{cases} 14b + 36c = 101.4 \\ 36b + 98c = 233.6 \end{cases}$$

La solución del sistema es $b = 20.1$ y $c =$ -5, y por tanto, la solución del ajuste es $h(t) = 20.1t - 5t^2$.

b) El polinomio de grado 2 $p(t) = a + bt + ct^2$, bajo las condiciones $p(0) = 0,\ p(4) = 0$, (se obtiene $b = -4c$), tiene la forma $p(t) = -4ct + ct^2 = (-4t + t^2)c$.

La curva $p(t) = (-4t + t^2)c$ que ajusta los datos de la tabla T viene dada por el sistema sobredeterminado:

$$\begin{cases} -3c = 15.4 \\ -4c = 19.9 \\ -3c = 15.4 \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones normales es $34c = -172$, cuya solución es $c =$ -5.0588.

Por tanto, la solución del ajuste es $p(t) = 20.2353t - 5.0588t^2$.

c) El polinomio de grado 2 $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ verifica $h(0) = 0$.

Por tanto, el ajuste $h(t)$ es la función obtenida en el apartado a:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 20.1t - 5t^2.$$

Por tanto, $v_0 = 20.1$ [m/s] y $g = 10$ [m/s^2].

La altura máxima se obtiene en el instante t_1 que verifica $h'(t_1) = 20.1 - 10t_1 = 0$.

Luego $t_1 = 2.01$ [s]. La altura máxima es $h(t_1) = 20.2005$ [m].

Problema 2.

a) Expresión del método de Newton: $x = x - \frac{p(x)}{p'(x)} = x - \frac{x^3 - 3x - 2}{3x^2 - 3}$

Convergencia en (1.5,2.0): Newton converge en un intervalo si podemos demostrar que M· e0 < 1 donde e0 es el error inicial y M es una cota superior de $M = \frac{|f''|}{2 \cdot |f'|}$ en el intervalo. Podemos usar como cota

$$M = \frac{\max(|f''|)}{2 \cdot \min(|f'|)}$$

En este caso f(x) es nuestro polinomio p(x). Examinemos p'(x) y p''(x):

$p'(x) = 3x^2 - 3$ Siempre positivo en intervalo dado.
Su valor mínimo se da para el valor más pequeño de x

Por lo tanto $\lfloor p'(x) \rfloor > 3 \cdot 1.5^2 - 3 = 3.75$

$p''(x) = 6x$ Siempre positivo en intervalo dado.
Su valor máximo se da para el valor más grande de x.

Por lo tanto $\lfloor p''(x) \rfloor < 6 \cdot 2.5 = 15$

Por consiguiente $M = \frac{\max(f'')}{2 \cdot \min(f')} = \frac{15}{2 \cdot 3.75} = 2$

Hay convergencia si M·e0<1, esto es, si e0<0.5. Y dado que la solución es s=2, empezando en cualquier punto de (1.5,2.5) eso está garantizado.

b) Sea x0=1.9 . Aplicando 2 veces la iteración obtenemos

Iteraciones	Error estimado
x0 = 1.900000	e0=
x1 = 2.007407	e1 =
x2 = 2.000036	e2 =

Con convergencia cuadrática $e_n \approx \lfloor x_{n+1} - x_n \rfloor$ por lo que podemos estimar:

e0 = | 2.007407 -1.900000 | = 0.107407
e1 = | 2.000036- 2.007407 | = 0.007371

Para estimar e2 sabemos que con convergencia cuadrática $e_{n+1} \approx K \cdot e_n^2$
Usando e1 y e0 podemos estimar K = e1/e0^2 = 0.6389
Por lo que e2 = 0.6389· 0.007371^2 = 0.000035

Iteraciones	Error estimado
x0 = 1.900000	e0= 0.107407
x1 = 2.007407	e1= 0.007371
x2 = 2.000036	e2 =0.000035

Como se ve los errores estimados concuerdan muy bien con los reales (diferencia con s=2) por lo que podrían usarse en un algoritmo para saber cuando parar.

c) Para x0=-1.1 obtenemos: x1 = -1.050794 x2 = -1.025806

Comparando con la verdadera solución s=-1 vemos que los errores son

e0 = 0.1 e1 = 0.051 e2 = 0.0258

Se observa que los errores se reducen a la mitad en cada iteración. Cuando el error se reduce en un factor constante en cada iteración (0.5 en este caso) estamos frente a una convergencia de tipo lineal.

Explicación: aunque el método de Newton está diseñado para tener convergencia cuadrática, en este caso la raíz s=-1 es doble y para este tipo de raíces el método de Newton pierde su convergencia cuadrática y pasa a ser un método lineal.

Problema 3

a)

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \to LUx = b$$

$$1^{\text{o}}\, Lc = b \to c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2^{\text{o}}\, Ux = c \to x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{\|x - x'\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|b - b'\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$\|A\|_\infty = 1 + \alpha$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\|b - b'\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\frac{1}{10}}{1} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\|x - x'\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le (\frac{1}{\alpha} + 1)\frac{1}{10}$$

Para valores de α cercanos a 0 el error aumenta considerablemente al aumenta el cond(A).

c)

$$\frac{\|x - x'\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{1}{10\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha} + 1$$